OLASILIKVE İSTATİSTİK

RASGELE(TESADÜFİ) DEĞİŞKENLER VE DAĞILIMLARI

Değeri, bir deney sonucuyla belirtilen değişkene rasgele değişken denir. Rasgele değişkenler $X, Y, Z, \ldots$ gibi büyük harflerle, aldıkları değerler ise $x, y, z, \ldots$ gibi küçük harflerle gösterilir.

Kesikli rasgele değişken: X bir rasgele değişken olsun. Alabileceği değerlerin sayısı sonlu yada sayılabilir sonsuzlukta ise X 'e kesikli rasgele değişken denir.

Sürekli rasgele değişken: X rasgele değişkeni bir aralıkta yada birden çok aralıkta her değeri alabiliyorsa X 'e sürekli rasgele değişken denir.

Bir paranın iki kez atılması deneyini düşünelim.

$\mathrm{S} = \{\mathrm{YY}, \mathrm{YT}, \mathrm{TY}, \mathrm{TT}\}$ dir.

X : Üste gelen turaların sayısı olsun.

X 'in alabileceği değerler 0, 1, 2 olup $x = 0, 1, 2$ ile gösterilir. X kesikli rasgele değişkendir.

Bazı fiziksel deneylerde ölçümler herhangi bir aralıktaki her değeri alabilir. Yani örnek uzay sayılabilir değildir ve rastgele değişken zaman, ağırlık, yükseklik gibi ölçümlerin sonucu olan herhangi bir değeri alır. Bu tip rastgele değişkenlere sürekli rastgele değişken denir.

Kesikli Rasgele Değişkenlerin dağılımı

Kesikli rasgele değişkenin olasılık dağılımı yada olasılık fonksiyonu; rasgele değişkenin alabileceği değerlerin, karşılık gelen olasılıklarla birlikte belirtilmesidir.

Bir paranın iki kez atılması deneyinde " Üste gelen turaların sayısı " olarak tanımlanan X rasgele değişkeninin olasılık dağılımı,

$X = x$	0	1	2
$f(x) = P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

biçimindedir.

$f(0) = P(X = 0) = \frac{1}{4}$, $f(1) = P(X = 1) = \frac{2}{4}$, $f(2) = P(X = 2) = \frac{1}{4}$

Tanım (Olasılık fonksiyonu):

X; sonlu sayıdaki $x_1, x_2, \dots, x_n$ değerlerini $f(x_i) = P(X = x_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ olasılıkları ile alabilen kesikli rasgele değişken olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna X'in olasılık fonksiyonu denir.

1) $f(x_i) \geq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$

2) $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 1$

X rasgele değişkeninin bir tek x değerine eşit olma olasılığı ile ilgilendiğimiz gibi, X'e eşit küçük olması olasılığı ile de ilgilenebiliriz.

Tanım (Dağılım fonksiyonu): Bir X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu $F(X)$ ile gösterilir ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$F(X) = P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i)$$

Örnek.

$X = x$	0	1	2
$f(x) = P(X = x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{4}$

olsun. Dağılım fonksiyonunu elde ediniz.

Çözüm.

$X = x$	0	1	2
$F(x) = P(X \leq x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1

olur.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < 0 \\ \frac{1}{4} & , \quad 0 \leq x < 1 \\ \frac{3}{4} & , \quad 1 \leq x < 2 \\ 1 & , \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Örnek. X kesikli rasgele değişkenini için

$X = x$	-3	0	2	3
$f(x) = P(X = x)$	0.2	0.1	0.4	c

veriliyor.

a) c sabitinin değeri nedir?

b) X, hangi değeri en büyük olasılıkla alır?

c) $P(X > 0) = ?$

d) $P(X = -2) = ?$

e) X 'in dağılım fonksiyonunu yazınız.

Çözüm.

a) $f(x)$ 'in olasılık fonksiyonu olabilmesi için, $\sum_{i=1}^{N} f(x_i) = 1$ olması gerekir.

$$f(-3) + f(0) + f(2) + f(3) = 1 \; olmalıdır.$$

$$0.2 + 0.1 + 0.4 + c = 1 \;\Rightarrow\; c = 0.3 \; olur.$$

b) X , 2 değerini en büyük olasılıkla alır.

c) $P(X > 0) = P(X = 2) + P(X = 3) = 0.4 + 0.3 = 0.7$

d) $P(X = -2) = 0$

e)

$X = x$	-3	0	2	3
$f(x) = P(X = x)$	0.2	0.1	0.4	0.3

$X = x$	-3	0	2	3
$F(x) = P(X \leq x)$	0.2	0.3	0.7	1

$$F(x) = \begin{cases} 0 & , \quad x < -3 \\ 0.2 & , \quad -3 \leq x < 0 \\ 0.3 & , \quad 0 \leq x < 2 \\ 0.7 & , \quad 2 \leq x < 3 \\ 1 & , \quad x \geq 3 \end{cases}$$

Sürekli Rasgele Değişkenlerin dağılımı

X, $(-\infty, +\infty)$ aralığında tanımlanan sürekli rasgele değişken olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan $f(x)$ fonksiyonuna X rasgele değişkeninin "olasılık yoğunluk fonksiyonu" denir.

1) $f(x) \geq 0 \quad , -\infty < x < \infty$
2) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$

$f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip olan X rasgele değişkeninin herhangi c ve d değerleri $(-\infty < c < d < \infty)$ arasında bulunma olasılığı

$$P(c < X < d) = \int_{c}^{d} f(x)dx$$

ile bulunur.

NOT:

$$P(c < X < d) = P(c \leq X \leq d) = P(c < X \leq d) = P(c \leq X < d)$$

NOT: Sürekli bir X rasgele değişkeninin, belli bir x değerini alma olasılığı sıfırdır. Yani, $P(X = x\ ) = 0$ dır.

Tanım (Dağılım fonksiyonu):

$X,\ f(x)$ olasılık yoğunluk fonksiyonuna sahip sürekli rasgele değişken olsun. X 'in dağılım fonksiyonu,

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds$$

olarak tanımlanır.

NOT: X sürekli bir rasgele değişken ise, dağılım fonksiyonu da bütün x değerleri için süreklidir.

Teorem. Sürekli bir X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ ve dağılım fonksiyonu $F(X)$ olsun. Bu taktirde bütün x değerlerinde diferansiyellenebilir bir $F(X)$ fonksiyonu için

$$f(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x}$$

ve $a \leq b$ olmak üzere herhangi a ve b sayıları için, $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$ dır.

NOT: Dağılım fonksiyonuna, birikimli dağılım fonksiyonu da denilmektedir.

NOT: Dağılım fonksiyonu, artan bir fonksiyondur.

NOT: $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ ve $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$ dir.

Örnek. $f(x) = 1$, $0 < x < 1$ verilsin.

a) $P(0.25 < X < 0.75) =?$

$$P(0.25 < x < 0.75) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0.25}^{0.75} 1dx = 0.50$$

b) $P(X > 0.25) =?$

$$P(x > 0.25) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0.25}^{1} 1dx = 0.75$$

Örnek. Belli bir tipteki elektrik ampullerinin dayanma süresi(saat) ile ilgili aşağıdaki olasılık yoğunluk fonksiyonu veriliyor.

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{x^3} & , \ 1500 \leq x \leq 2500 \\ 0 & , \ diğer\ durumlarda \end{cases}$$

a) k sabitinin değeri ne olur?

$f(x)$, olasılık yoğunluk fonksiyonu diye verilmiş. O halde, $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$ olmalıdır.

$$\int_{1500}^{2500} \frac{k}{x^3}\, dx = 1 \Rightarrow k = 7031250$$

bulunur.

b) Rasgele seçilen bir ampulün dayanma süresinin 2000 saat ve daha fazla olma olasılığını bulunuz.

$$P(X \geq 2000) = \int_{2000}^{2500} \frac{7031250}{x^3}\, dx = 0.3164$$

Örnek. $f(x) = \begin{cases} k(1-x) \ , & 0 < x < 1 \\ 0 \ , & d.d. \end{cases}$ veriliyor.

a) k sabitini bulunuz.

b) Dağılım fonksiyonunu bulunuz.

c) $P(X \leq 1/2) = ?$

Çözüm.

a) $\int_0^1 f(x)dx = 1 \Rightarrow \int_0^1 k(1-x)\, dx = 1 \Rightarrow k = 2$

$f(x) = \begin{cases} 2(1-x) \ , & 0 < x < 1 \\ 0 \ , & d.d. \end{cases}$ olur.

b) $F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(s)ds = \int_0^x 2(1-s)ds = 2x - x^2$

$$F(X) = \begin{cases} 0 \ , & x \leq 0 \\ 2x - x^2 \ , & 0 < x < 1 \\ 1 \ , & x \geq 1 \end{cases}$$

c) $P(X \leq 1/2) = F\left(\frac{1}{2}\right) = 2\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 3/4$

SORU. $f(x) = \begin{cases} 2x \ , & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \ , & d.d. \end{cases}$ veriliyor.

a) $F(X) = ?$

b) Dağılım fonksiyonunu yardımıyla aşağıdaki olasılıkları bulunuz.

$$P(0.20 < X \leq 0.50) = ?$$

$$P(X \leq 0.75) = ?$$

$$P(X > 0.35) = ?$$

Örnek. $f(x) = \begin{cases} \binom{3}{x}\left(\frac{1}{3}\right)^x \left(\frac{2}{3}\right)^{3-x} & , \ x = 0,1,2,3 \\ 0 & , \quad d.d. \end{cases}$

veriliyor. X rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm. X , kesikli rasgele değişkendir. Olasılık fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$X = x$	0	1	2	3
$f(x) = P(X = x)$	$8/27$	$12/27$	$6/27$	$1/27$

Dağılım fonksiyonu ise,

$X = x$	0	1	2	3
$F(x) = P(X \leq x)$	$8/27$	$20/27$	$26/27$	$27/27$

olur.

Rasgele değişkenlerin fonksiyonları

X rasgele değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu $f(x)$ olsun. $Y = f(x)$ şeklinde tanımlanan rasgele değişkenin olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulmak için,

i) Y nin dağılım fonksiyonu bulunur. Yani $G(Y) = P(Y \leq y)$ bulunur.

ii) $G(Y)$ nin y ye göre türevi alınarak $g(y)$ bulunur.

iii) $g(y) > 0$ olacak şekilde Y nin tanım bölgesinde y değerleri belirlenerek o.y.f. elde edilir.

Örnek.

$f(x) = \begin{cases} 2x & , \ 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad d.d. \end{cases}$ veriliyor.

$Y = 4X$ biçiminde tanımlanan Y değişkeninin dağılım fonksiyonunu ve olasılık yoğunluk fonksiyonunu bulunuz.

Çözüm.

Dağılım fonksiyonu;

$$\mathrm{G(Y) = P(Y \leq y) = P(4X \leq y) = P}\left(\mathrm{X} \leq \frac{\mathrm{y}}{4}\right) = \int_0^{y/4} f(x)dx = \int_0^{y/4} 2xdx = \frac{y^2}{16}$$

$$\mathrm{G(Y)} = \begin{cases} 0 & , \quad y \leq 0 \\ \frac{y^2}{16} & , \quad 0 < y < 4 \\ 1 & , \quad y \geq 4 \end{cases}$$

Olasılık yoğunluk fonksiyonu;

$$\mathrm{g(y)} = \frac{\partial G(Y)}{\partial y} = G'(Y) = \frac{y}{8}$$

$$\mathrm{g(y)} = \begin{cases} \frac{y}{8} & , \quad 0 < y < 8 \\ 0 & , \quad d.d. \end{cases}$$

Soru.

$f(x) = \begin{cases} 2x & , \quad 0 < x < 1 \\ 0 & , \quad d.d. \end{cases}$ veriliyor.

$Y = 3X + 1$ ise $\mathrm{g(y)} =?$